数理解析研究所講究録
471巻 1982年 97-105

Acyclic Digraph と Graph の Acyclic Orientation に関するいくつかの話題

東海大 理学部 土屋 守正
(TSUCHIYA MORIMASA)
恵羅 博
(ERA HIROSHI)
成嶋 弘
(NARUSHIMA HIROSHI)

一般にグラフというと，無向グラフだけ，あるいは、有向グラフだけについて扱う場合が多い。しかし，無向グラフに向き付けをすることにより，両者の関係を調べると，多くの有益な結果がでてくる。そこで，ここにおいては，置換凸体の端点と向き付けとの関係，Acyclic Orientation と Chromatic polynomial あるいは，Chromatic number，Independent number との関係，また，ある種の向き付けによる完全マッチングの数え上げについてまとめてみた。特に，置換凸体の端点と向き付けとの関係は，Bool束上のchainの数え上げとも関係しており，今後，この方面への発展がのぞめる。

1. Acyclic Orientation と基多面体について

グラフの Acyclic Orientation に関する最近の結果の1つに冨澤[1]の準マトロイドの研究より得られた次の結果がある。

定理 [冨澤]

単純グラフ G の向き付けと向き付けから構成される基多面体 $\mathcal{Z}_G$ の格子点の間に以下のような対応がある。

acyclic な向き付け ⟷ $\mathcal{Z}_G$ の端点

強連結な向き付け ⟷ $\mathcal{Z}_G$ の内部の格子点

acyclic でも強連結でもない向き付け ⟷ $\mathcal{Z}_G$ の境界上の端点でない格子点

ここで，完全グラフ K_n に対応する基多面体を考えてみると基多面体は n 次元置換凸体になる。n 次元置換凸体の境界の個数については、次の定理が知られている。

定理 [成嶋]

$C_B^{*(1.0)}(n,x)$ の x^i の係数は n 次元置換凸体の $n-i$ 次元の境界の個数に等しい。

系 [Gross]

$C_B^{*(1.0)}(n,1)$ が n 次元置換凸体の境界の総数に等しい。

ここで，$C_B^{*(1.0)}(n,x)$は，n個のatomからなるBool束B_nの$\mathbb{1}$（top）から$\mathbb{0}$（bottom）への指令フロー多項式であり，x^iの係数は，$\mathbb{1}$（top）から0（bottom）への長さiのchainの数を表わしている。

$C_B^{*(1.0)}(n,x)$の漸化関係，母関数表現は以下の通りである。

$$C_B^{*(1.0)}(n,x) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} C_B^{*(1.0)}(k,x)\cdot x & n>1 \end{cases}$$

$$G(C_B^{*(1.0)}(n,x),\ z) = \frac{1}{1+x-xe^z}$$

$$C_B^{*(1.0)}(n,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(x+1)^{j+1}} j^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} M(n,k,0)\, x^k$$

$$M(n,k,0) = \sum_{i+j=k} (-1)^i \binom{k}{i} j^n$$

ここで，$M(n,k,0)$は，$|A|=n$，$|B|=k$ なる2個の集合A，BのAからBへのonto mapの個数を表している。

$n=4$についてみてみると

$$C_B^{*(1.0)}(4,x) = 24x^4+36x^3+14x^2+x$$

であり，K_4から構成される基多面体の

端点の個数 $= 24$

辺の個数 $= 36$

面の個数 $= 14$

多面体の個数 $= 1$

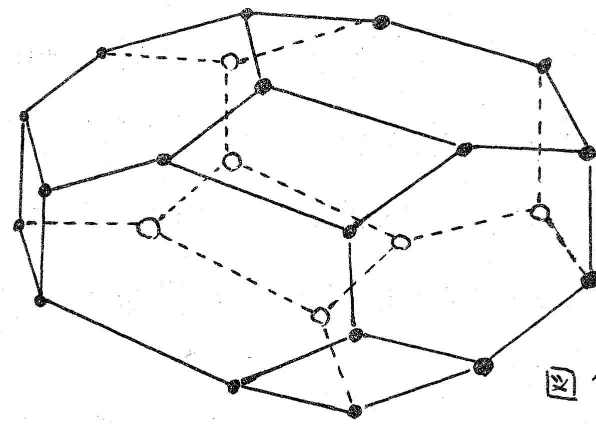

図1

を示している。

実際，基多面体は，図1のようになっていて，$C_B^{*(1,0)}(n,x)$ の x^i の係数と同じ数だけ端点，辺，面を持っている。また，K_4 には，24個の端点に対応する acyclic Orientation がある。

2. Acyclic Orientation と Chromatic polynomial について

定理 [Stanley]

G を n 点からなるグラフ

$\chi(G,\lambda)$ を G の chromatic polynomial

とすると

$$(-1)^n \chi(G,-1) = G \text{ の acyclic orientation の個数}$$

という Stanley の結果は，Rota の Möbius function に関する研究から得られた

$$\chi(G,\lambda) = \sum_{\theta \in L(G)} \mu(0,\theta)\,\lambda^{n-r(\theta)}, \qquad L(G): G \text{ の bond lattice}$$

という結果（恵羅[5]にまとめられている。）より

$$(-1)^n \sum_{\theta \in L(G)} \mu(0, \theta)(-1)^{n-r(\theta)} = G \text{ の acyclic orientation の個数}$$

とも表わせる。

3. Acyclic Orientation と Chromatic number, Independence number について

定理　[Deming]

$\chi(G)$ をグラフ G の chromatic number

とすると

$$\chi(G) = \min_{\omega \in \Omega} \max_{C \in \mathscr{C}_\omega} |C|$$

である。ここで，

Ω : G の acyclic orientation の集合

$\mathscr{C}_\omega$: ω で向き付けられた G の chain の集合

である。

定理の証明はグラフ G の点集合 V に次のような source decomposition とよばれる分割を施すことによりなされている。

source decomposition

V の分割 $V_1 \cdots V_k$ で

V_1 : $\overline{G}$（G に acyclic な向き付けをしたもの）の indegree が 0 の点集合．

V_i : $V - \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$ の点で生成されるグラフで indegree が 0 の点集合

なるもの。

さて，$\overline{G}$ の各点に次のように多項式を対応させる。

$\alpha : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$

$$\alpha(v) = \begin{cases} 1 & v \text{ が source のとき} \\ \left(\sum_{u \to v} \alpha(u)\right) x & \text{その他} \end{cases}$$

ただし，$\mathbb{Z}[x]$ は，x を変数とする整数係数の多項式環であり，$\sum_{u \to v}$ は，v に入る点 u についての和である。

このとき

点集合の多項式の次数による分割 = source decomposition

である。

定理 [Deming]

Ω : G の acyclic orientation の集合

$\mathcal{D}_\omega$: ω で向き付けされた G の chain decomposition

β_0 : G の independence number

とすると．

$$\beta_0 = \max_{\omega \in \Omega} \min_{\mathcal{X} \in \mathcal{D}_\omega} |\mathcal{X}|$$

ここで，chain decomposition $\mathcal{X}$ とは，$\bar{G}=(V, U)$ を acyclic digraph とすると，$\bar{G}$ の vertex-disjoint chain の集まり $\mathcal{X}$ で，それらの chain の点の union が V になるものである。

定理より次の Corollary が得られる。

系　[Dilworth's Theorem]

ω が G の transitive orientation ならば

$$\beta_0 = \min_{\mathcal{X} \in \mathcal{D}_\omega} |\mathcal{X}|$$

である。

4. 完全マッチングの数え上げについて

完全マッチング W を持つ反対称1－グラフ $G=(X, U)$ に対して

$$b_{ij} = \begin{cases} +1 & (x_i\ x_j) \in U \\ -1 & (x_j\ x_i) \in U \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって，交代行列 $B=[b_{ij}]$（G の随伴行列）が対応できる。さて，μ^+ を G の一つの閉路 μ に対して，閉路を一周する向きと同じ向きの弧の集合とし，閉路の族 $M=\{\mu_i \mid i \in I\}$ に対して

グラフGがMに関して良く向き付けられている。

$$\Longleftrightarrow \quad \forall_i \in I \ ; \ |\mu_i^+| = \mathrm{odd}$$

と定義する。

命　題

$|\mathrm{Pf}\,B| \leqq$ グラフの完全マッチングの個数

等号は、Pf B の展開の非零項がすべて同符号を持つとき

かつ、その時に限り成立する。

定　理　[Kasteleyn]

次の(1)(2)は同値である。

(1) Pf B の展開の非零項は、すべて同符号を持つ。

(2) G はWに関する交互閉路全体の族に関して良く向き付けられている。

以上の命題と定理より偶位数の単純グラフGの完全マッチングの数え上げは，Gのある完全マッチングに対して，交互閉路に関して良い向き付けをし，向き付けられたグラフの随伴行列BのPf B を計算すればできるということがわかる。

参考文献

[1] 富澤信明, 超空間論(XI) グラフ的準マトロイドとその向き付けへの応用, CAS81-85, 55-62 (1981)

[2] 成嶋弘, A Class of Recurrence Relations on Acyclic Digraphs of Poset Type, 数解研講究録 427, 56-67 (1981)

[3] O.A. Gross, Preferential Arrangement, Am. Math. Monothly 69, 4-8 (1962)

[4] R.P. Stanley, Acyclic Orientations of Graphs, Discrete Math. 5, 171-178 (1973)

[5] 恵羅博, Combinatorial Geometry and Möbius Function, 東海大修士論文 (1976)

[6] R. W. Deming, Acyclic Orientation of Graph and Chromatic and Independence Numbers, J. C. Theory Ser. B 26 101-110 (1979)

[7] C. Berge, Graphs and Hypergraphs, North-Holland and Elsevier, Amsterdam, (1973)